数学Ⅲ

復習① 無限等比数列 $\{r^n\}$ の極限の収束条件

$\boxed{\quad}$ のとき $\{r^n\}$ は 1 に収束

$\boxed{\quad}$ のとき $\{r^n\}$ は 0 に収束

復習② 初項 a, 公比 r の無限等比級数の収束条件

無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdot\cdot\cdot + ar^{n-1} \cdot\cdot\cdot$ について

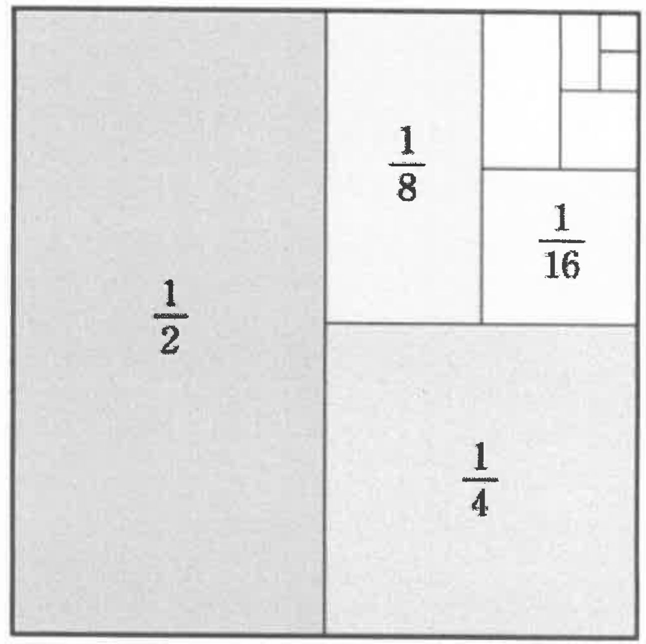
（ア） $a=0$ のとき $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ は収束し，その和は 0

（イ） $a \neq 0$ のとき

$\boxed{\quad}$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ は収束し，

その和は $\boxed{\quad}$

[導入問題]



本時の目標

図形へ応用された極限値を
無限級数の和で定め、計算する

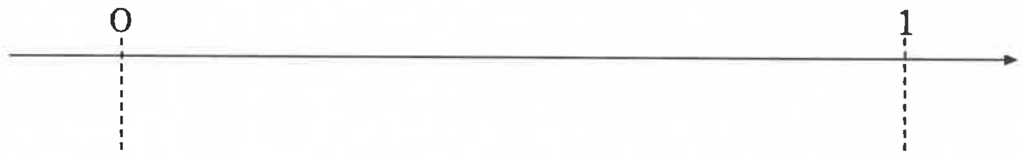
［応用例題4］

数直線上で，点Ｐが原点Ｏから出発して，正の向きに１だけ進み，次に負の向きに $\frac{1}{2}$ だけ進む。更に，正の向きに $\frac{1}{2^2}$ だけ進み，次に負の向きに $\frac{1}{2^3}$ だけ進む。以下，このような運動を限りなく続けるとき，点Ｐが近づいていく点の座標を求めよ。

＜題意の把握＞

点Pがどのような動きをするのかを分析してみよう。

n 回動かしたときの点Pの座標を x_n とおくと・・・・・



＜具体化＞

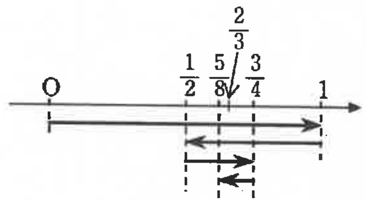
$x_1 = \boxed{\quad}$　$x_2 = \boxed{\quad}$　$x_3 = \boxed{\quad}$　$x_4 = \boxed{\quad}$

点Pが近づいていく点の座標 x は・・・

$x =$

＜解答作成＞

点Ｐの座標は，順に次のようになる。



$$1,\ 1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2},\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3},\ \cdots\cdots$$

ゆえに，点Ｐが近づいていく点の座標を x とすると，

x は初項 $\boxed{\quad}$，公比 $\boxed{\quad}$ の無限等比級数で表される。

$\boxed{\quad}$ であるから，この無限等比級数は収束して

$$x = \frac{\quad}{1-\quad} = \boxed{\quad}$$

[練習16]

数直線上で，点Ｐが原点Ｏから出発して，正の向きに1だけ進み，次に負の向きに$\frac{1}{3}$だけ進む。更に，正の向きに$\frac{1}{3^2}$だけ進み，次に負の向きに$\frac{1}{3^3}$だけ進む。以下，このような運動を限りなく続けるとき，点Ｐが近づいていく点の座標を求めよ。

解答

点Ｐの座標は，順に次のようになる。

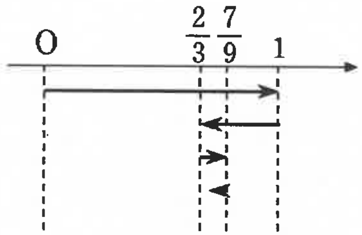
1

$1-\frac{1}{3}$

$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}$

$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{3^3}$

……



ゆえに，点Ｐが近づいていく点の座標をxとすると，

xは初項1，公比$-\frac{1}{3}$の無限等比級数で表される。

$\left|-\frac{1}{3}\right|<1$であるから，この無限等比級数は収束して

$$x=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}$$

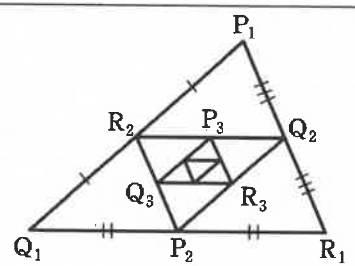
よって，点Ｐが近づいていく点の座標xは　　$x=\frac{3}{4}$

[応用例題5]

面積が a の $\triangle P_1Q_1R_1$ がある。右の図のように，$\triangle P_1Q_1R_1$ の各辺の中点を頂点として $\triangle P_2Q_2R_2$ を作り，次に $\triangle P_2Q_2R_2$ の各辺の中点を頂点として $\triangle P_3Q_3R_3$ を作る。以下，同様にして作られる次の三角形の面積の総和 S を求めよ。

$\triangle P_1Q_1R_1$，$\triangle P_2Q_2R_2$，$\triangle P_3Q_3R_3$，……，

$\triangle P_nQ_nR_n$，……



＜題意の把握＞

$\triangle P_1Q_1R_1$，$\triangle P_2Q_2R_2$，$\triangle P_3Q_3R_3$ を赤，青，緑で囲め。

＜具体化＞

$\triangle P_1Q_1R_1$，$\triangle P_2Q_2R_2$，$\triangle P_3Q_3R_3$ の面積を求めよ。

$\triangle P_1Q_1R_1=$ $\boxed{}$　$\triangle P_2Q_2R_2=$ $\boxed{}$　$\triangle P_3Q_3R_3=$ $\boxed{}$

三角形の面積の総和Sはどのような無限級数で表されるか？

$S=$

＜解答作成＞

$\triangle P_{n+1}Q_{n+1}R_{n+1} \backsim \triangle P_nQ_nR_n$ であり，

相似比は $\boxed{}$ であるから，面積比は $\boxed{}$ である。

$\triangle P_nQ_nR_n$ の面積を S_n とすると $\boxed{}$

よって，数列 $\{S_n\}$ は初項 $\boxed{}$ ，公比 $\boxed{}$ の無限等比数列である。

ゆえに，面積の総和 S は，初項 $\boxed{}$ ，公比 $\boxed{}$ の

無限等比級数で表され， $\boxed{}$ であるから収束する。

したがって　$S=\dfrac{}{1-}=$ $\boxed{}$

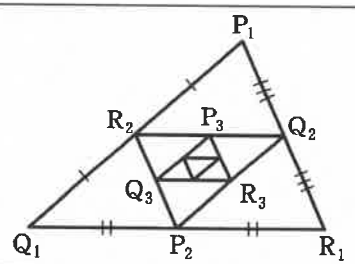
[練習17]

応用例題5において，$\triangle P_1Q_1R_1$ の周の長さが b であるとき，

$\triangle P_1Q_1R_1$，$\triangle P_2Q_2R_2$，$\triangle P_3Q_3R_3$，……，

$\triangle P_nQ_nR_n$，……

の周の長さの総和 l を求めよ。



解答

$$\triangle P_{n+1}Q_{n+1}R_{n+1} \backsim \triangle P_nQ_nR_n$$

であり，相似比は1：2であるから，周の長さの比は1：2である。

$\triangle P_nQ_nR_n$ の周の長さを l_n とすると

$$l_{n+1}=\frac{1}{2}l_n,\ \ l_1=b$$

よって，数列 $\{l_n\}$ は初項 b，公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比数列である。

ゆえに，周の長さの総和 l は，初項 b，公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比級数で表され，

$\left|\frac{1}{2}\right|<1$ であるから収束する。

したがって　$l=\dfrac{b}{1-\dfrac{1}{2}}=2b$